27 / 12 / 2017

تكامل ليبيغ للدوال القياسية غير السالبة :

ملاحظة :

فإذا كانت f دالة قياسية غير سالبة فإنه :

$E(f>c)$ قياسية ; $\forall c\in R$ ، $[f]_n$ قياسية أيضاً :

$E([f]_n>c)$ قياسية أياً كان $c\in R$

$\forall x\in E$ $\quad [f(x)]_n \le f(x)$

$\forall x\in E$ $\quad [f(x)]_n \le n$

وبالتالي حسب الحالة السابقة فإن الدالة المقطوعة عند العدد n قابلة للمكاملة حسب مفهوم ليبيغ أي أن :

$\int_E [f]_n \, d\lambda$ موجود

ملاحظة أن :

$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le \dots$

$\int_E [f(x)]_1 \, d\lambda \le \int_E [f(x)]_2 \, d\lambda \le \dots$

أي أن هذه التكاملات تشكل متتالية متزايدة

فإذا كانت متتالية متزايدة محدودة من الأعلى ... تكون :

$\lim_{n\to\infty} \int_E [f(x)]_n \, d\lambda$ موجودة

إذاً

وإن كانت هذه المتتالية غير محدودة فإن تكامل ليبيغ قد يكون غير محدود

... التي مكننا لتعريف تكامل لوبيغ للدالة ... بالشكل التالي :

$$\int_E f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n \to \infty} \int_E [f(x)]_n\, d\lambda$$

ملاحظة مهمة :

إذا كانت :

$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f(x)]_n\, d\lambda$$

موجودة ومنتهية :

$$\int_E f(x)\, d\lambda(x) < +\infty$$

فإننا نسمي في هذه الحالة الدالة f دالة لوبيغية على المجموعة E ومجموعة الدوال اللوبيغية على المجموعة E ونرمز لها بـ $L^+(E)$ ((المجموعة E منتهية ...))

إذا كانت f لوبيغية على E وموجبة على المجموعة E عندئذ : نرمز لمجموعة الدوال اللوبيغية على E بـ $f \in L(E)$

↓

فضاء الدوال اللوبيغية على E

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f لوبيغية وغير سالبة ومحدودة على المجموعة E

مثال :

$$\int_F [f(x)]_n = \int_E f(x)\, d\lambda$$

وذلك لأنه من أجل n عدد كبير بقدر كاف من أجل يقتضي على:

$$[f(x)]_n = f(x) \quad ; \forall x \in E$$

نتائج:

1- كل دالة قياسية محدودة وغير سالبة على المجموعة E تكون دالة جموعية على E

2- بشكل عام نقول عن دالة f(x) إنها جموعية على مجموعة E إذا تحققت الشروط التالية:

أ- f دالة قياسية وغير سالبة

ب- إذا كانت لدينا: $\int_E f\, d\lambda < +\infty$

خواص الدوال الجموعية:

1- إذا كانت دالة f(x) جموعية على E فهي تكون محدودة تقريبا في كل مكان على E

البرهان:

إذا وضعنا $E_0 = E(f = +\infty)$ فيكفي علينا أن نبين أنه مجموعة:

$$E = (E - E_0) \cup E_0$$

عندئذ:

$$\int_E [f]_n\, d\lambda \geq \int_{E_0} [f]_n\, d\lambda$$

Alamal

ومنه بصفة عامة:

$$[f]_n = n \quad ; \forall x \in E_0$$

وبالتالي:

$$\int_E [f]_n \, d\lambda \geq \int_{E_0} [f]_n \, d\lambda = \int_{E_0} n \, d\lambda = n\lambda(E_0)$$

وبالتالي بما أن: $\lambda(E_0) \neq 0$ وذلك لأننا فرضنا قبل أن: $\lambda(E_0) > 0$

$$\int_E f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_E [f]_n \, d\lambda = +\infty$$

وهذا يناقض الفرض لأن الدالة f دالة قابلة للتكامل أي أن

مجموعة اللانهاية للدالة تكون $\lambda(E_0)$

فإن الدالة f تكون محدودة تقريباً في كل مكان على E

2- إذا كان $\lambda(E)=0$ فإن كل دالة حقيقية موجبة قابلة للقياس $f(x)$

تكون قابلة للتكامل على E كالآتي: $\int_E f \, d\lambda = 0$

الإثبات:

نعلم أن: $[f(x)]_n$ هي دالة حقيقية محدودة فإن تكاملها

لبيغ لهذه الدالة:

$$\int_E [f]_n \, d\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f]_n \, d\lambda = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\lambda = 0 < +\infty$$

3- إذا كانت f دالة قابلة للقياس وغير سالبة ومعرفة على المجموعة E فيمكن كتابة التكامل على أي مجموعة جزئية قابلة للقياس فإن:

$$\int_E f\,d\lambda \geq \int_{E_1} f\,d\lambda$$

حيث $E_1 \subset E$ مجموعة قابلة للقياس.

4- إذا كانت f(x) و g(x) دالتين قابلتين للقياس وغير سالبتين على المجموعة E وحيث أن: $f(x) \leq g(x) \; ; \forall x \in E$

عندئذ:

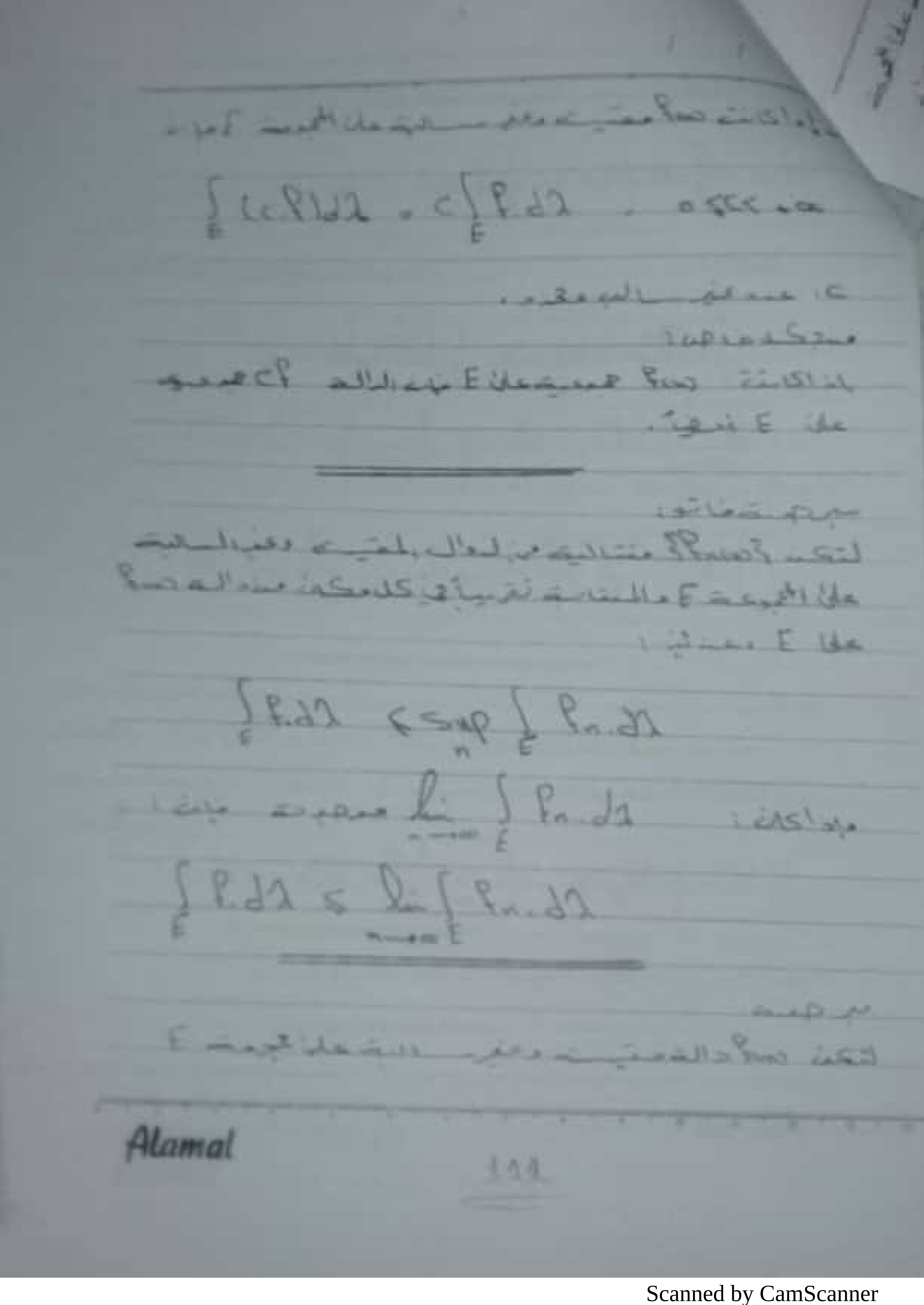
$$\int_E f\,d\lambda \leq \int_E g\,d\lambda$$

5- إذا كان $\int_E f\,d\lambda = 0$ حيث f دالة قابلة للقياس وغير سالبة فإن: $f \overset{a.e}{=} 0$ على E

6- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للقياس وغير سالبتين على المجموعة E فإن:

$$\int_E [f+g]\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda + \int_E g\,d\lambda$$

وبشكل عام إذا كانت كل من f و g قابلة للتكامل على E فإن [f+g] قابلة للتكامل على E



وإذا كانت f دالة قابلة للقياس وغير سالبة على المجموعة E فإن :

$$\int_E (cf)\,d\lambda = c\int_E f\,d\lambda \quad ، \quad c \geq 0 \text{ حيث}$$

c : عدد غير سالب حقيقي .

ملاحظة هامة :

إذا كانت الدالة f قابلة للقياس على E فإن الدالة cf قابلة للقياس على E أيضاً .

مبرهنة فاتو :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس وغير السالبة على المجموعة E والمتقاربة تقريباً في كل مكان من الدالة f على E عندئذٍ :

$$\int_E f\,d\lambda \leq \sup_n \int_E f_n\,d\lambda$$

وإذا كانت : $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\lambda$ موجودة فإن :

$$\int_E f\,d\lambda \leq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\lambda$$

مبرهنة :

لتكن f دالة قابلة للقياس وغير سالبة على المجموعة E

مبرهنة : $E_1 \subset E$ مجموعة جزئية مقيسة ، عندئذ :

$$\int_E f \, d\lambda \geq \int_{E_1} f \, d\lambda$$

الإثبات :

نأخذ النهاية للطرفين لما n يؤول :

$$\int_E [f]_n \, d\lambda \geq \int_{E_1} [f]_n \, d\lambda \longrightarrow$$

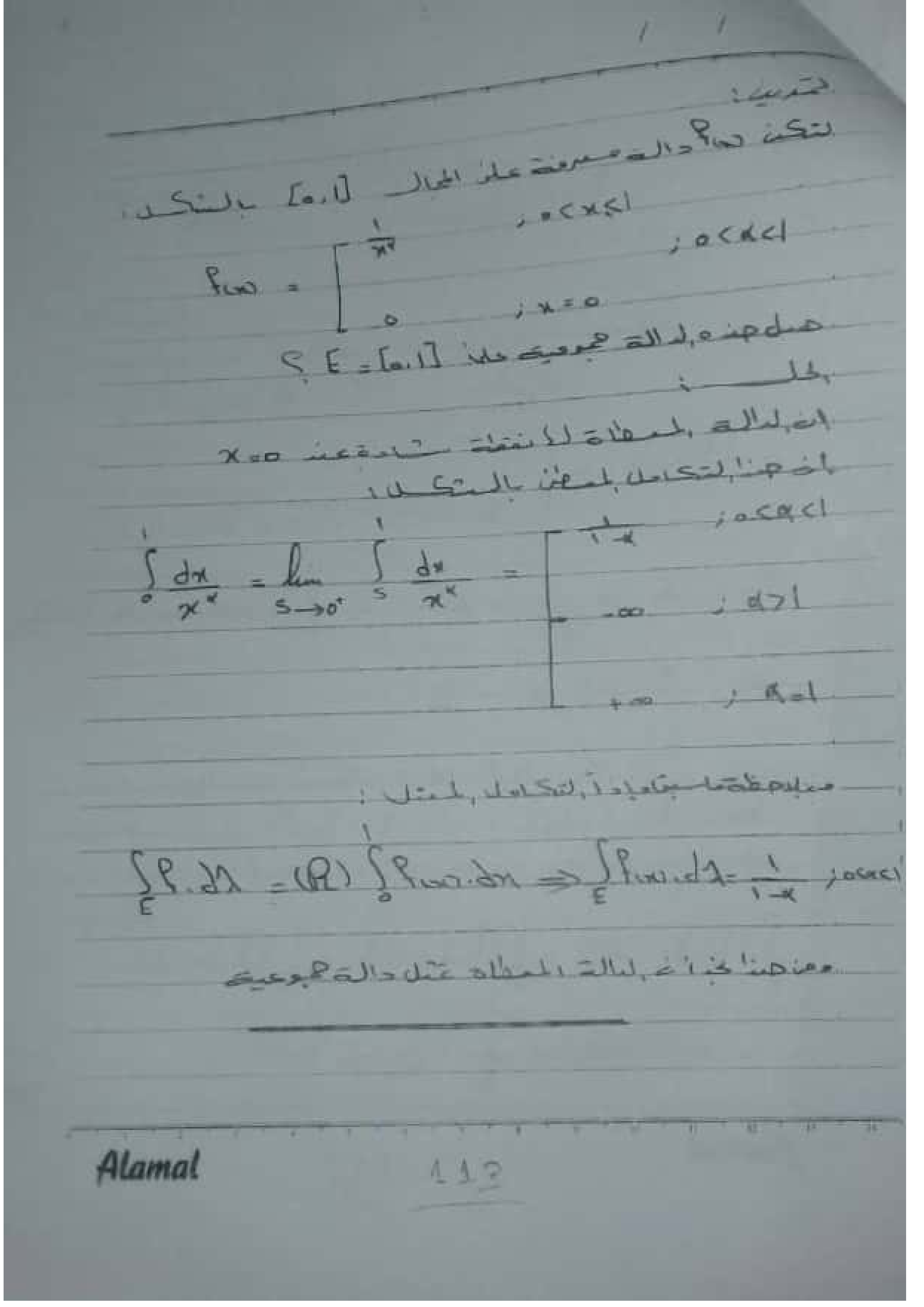
$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f]_n \, d\lambda \geq \lim_{n \to \infty} \int_{E_1} [f]_n \, d\lambda \Rightarrow$$

$$\int_E f \, d\lambda \geq \int_{E_1} f \, d\lambda$$

مبرهنة ليفي :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة وغير السالبة على المجموعة E ومتقاربة نقطياً من الدالة f عندئذ :

$$\int_E f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\lambda$$



تمرين:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\alpha}} & ; 0<x\leq 1 \quad ; 0<\alpha<1 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

هل هذه الدالة مجموعية على $E=[0,1]$ ؟

الحل:

ان الدالة المعطاة لانهائية شاذة عند $x=0$

ناخذ هنا التكامل المعتل بالشكل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & ; 0<\alpha<1 \\ -\infty & ; \alpha>1 \\ +\infty & ; \alpha=1 \end{cases}$$

ومن ملاحظة ما سبق وقاعدة التكامل المعتل:

$$\int_E f\,d\lambda = (R)\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \int_E f(x)\,d\lambda = \frac{1}{1-\alpha} \quad ; 0<\alpha<1$$

ومن هنا نجد ان الدالة المعطاة تمثل دالة مجموعية

Alamal

التمرين :

احسب تكامل ليبيغ للدالة الآتية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \quad ; x \in]1,2[$$

الحل :

نستعمل الدالة من أجل n بحيث بالشكل التالي

$$[f(x)]_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} & ; x \in [1+\frac{1}{n^3}, 2[\\ n & ; x \in]1, 1+\frac{1}{n^3}[\end{cases}$$

توضيح :

$$f(x) \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \leq n \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq n^3 \Rightarrow x-1 \geq \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow 2 > x \geq 1 + \frac{1}{n^3}$$

- بعد ما قمنا بتجزئة المجال $]1,2[$

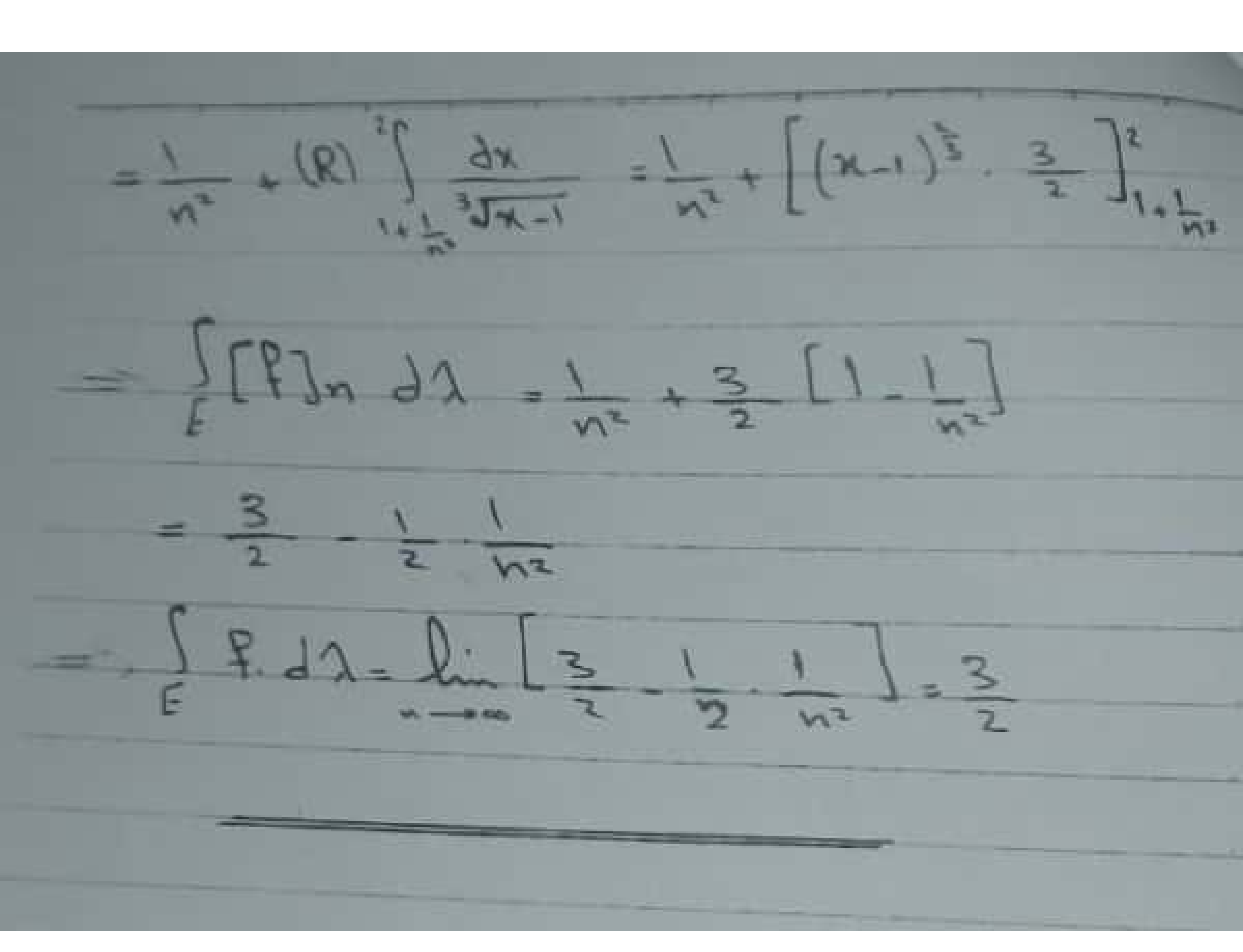
مجموعتان : $E_1 = [1+\frac{1}{n^3}, 2[$ ، $E_2 =]1, 1+\frac{1}{n^3}[$

من خواص المجموعتين منفصلتين بالشكل التالي :

$$\int_E [f]_n \, d\lambda = \int_{E_1} [f]_n \, d\lambda + \int_{E_2} [f]_n \, d\lambda$$

$$= n.\lambda(E_1) + \int_{E_2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) . d\lambda$$

Alamal



$$= \frac{1}{n^2} + (R)\int_{1+\frac{1}{n^2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{n^2} + \left[(x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}\right]_{1+\frac{1}{n^2}}^{2}$$

$$\Rightarrow \int_E [f]_n \, d\lambda = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \int_E f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\right] = \frac{3}{2}$$